NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

<u>Instrucciones</u>:

- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.
- **Secciones:**

A : Prof. Roque Bustamente. **C** : Prof. Jorge Espinoza
B : Prof. Cristian Mardones.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

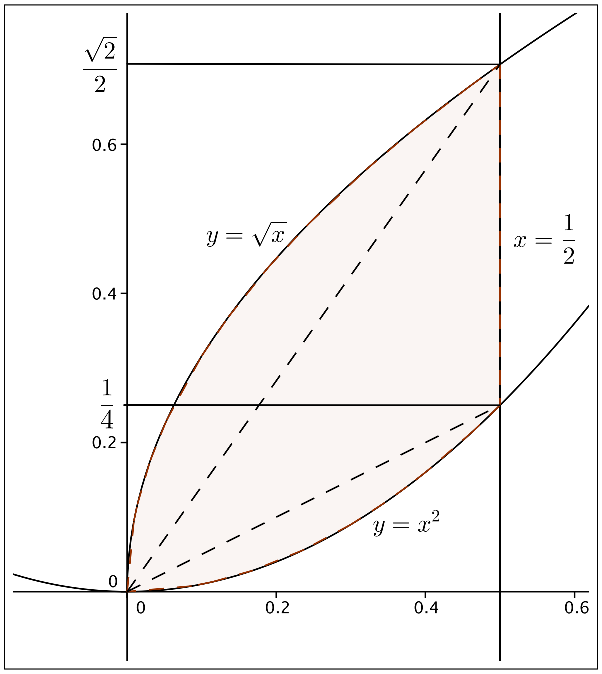
UTALCA

IMAFI

1) Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante encerrada por las curvas

$$y = \sqrt{x} \quad , y = x^2 \quad , x \leq \frac{1}{2}$$

a) **[5 ptos.]** Realice un esbozo ***ordenado y claro*** de la región $\mathcal{R}$. *Poner especial cuidado en este item, ya que los dos siguientes dependen de éste.* **Solución**:



5 puntos

b) **[5 ptos.]** Escribir ***sin calcular***, la integral I que representa el área de $\mathcal{R}$ en el orden $dy\,dx$ y $dx\,dy$
Solución:

- $A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_0^{1/2}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx$

2 puntos

- $A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_0^{1/4}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{1/4}^{\sqrt{2}/2}\int_{y^2}^{1/2} dx\,dy$

3 puntos

c) **[10 ptos.]** Escribir ***sin calcular***, la integral I usando coordenadas polares. **Solución**:

$$\int_0^{\arctan(1/2)}\int_0^{\sin\alpha/\cos^2\alpha} r\,dr\,d\alpha + \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(\sqrt{2})}\int_0^{(\sec\alpha)/2} r\,dr\,d\alpha + \int_{\arctan(\sqrt{2})}^{\pi/2}\int_0^{\cos\alpha/\sin^2\alpha} r\,dr\,d\alpha$$

2+3+5 puntos

Nota: Un límite malo dentro de la integral 0 puntos.

2) **[15 ptos.]** Use el teorema de cambio de variable para calcular la integral

$$I = \int\int_R \left(\frac{y^2}{x^2}+2\right)^2 e^{\frac{2y}{x}+\frac{y^3}{3x^3}}\, dA$$

donde R es la región en el primer cuadrante, limitada por la gráfica de las curvas:

$$x^2+\frac{y^2}{2}=1, \quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1, \quad y=x, \quad y=2x$$

Solución: Haciendo el cambio de variable $u = x^2+\dfrac{y^2}{2}, \quad v=\dfrac{y}{x}$ se tiene que

- $1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 2$
- $J = \begin{vmatrix} 2x & y \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}^{-1} = \left(2+\dfrac{y^2}{x^2}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2+v^2}$

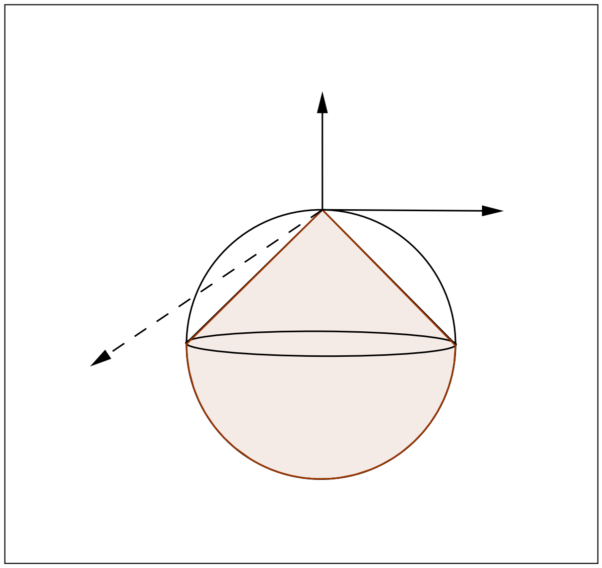
4 puntos

Luego

$$\underbrace{I = \int_1^2\int_1^2 (v^2+2)e^{2v+\frac{v^3}{3}}\, du\, dv}_{5pt} = \underbrace{e^{20/3}-e^{7/3}}_{6pt}$$

3) Sea $\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2z \leq 0\}$

a) **[10 ptos.]** Escribir ***sin calcular***, la(s) integral(es) que permiten calcular el volumen de R en coordenadas rectangulares.
Solución:



$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}-1}^{-\sqrt{x^2+y^2}} dz\, dy\, dx$$

10 puntos

b) **[5 ptos.]** Escribir ***sin calcular***, la(s) integral(es) que permiten calcular el volumen de R en coordenadas cilíndricas.
Solución:

$$V = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-r^2}-1}^{-r} r\, dz\, dr\, d\alpha$$

5 puntos

c) **[10 ptos.]** Calcular el volumen de R usando coordenadas esféricas.
Solución:

$$V = \underbrace{\int_{0}^{2\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} \int_{0}^{-2\cos\phi} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\alpha}_{5pt} = \underbrace{\pi}_{5pt}$$